Competencias básicas: competencia matemática

Marzo de 2009

Félix Rodríguez Díaz
Universitat de les Illes Balears
felix.rodriguez@uib.es

Resumen

¿Qué es la competencia matemática? ¿Cómo podemos favorecer su desarrollo en el aula de Matemáticas? ¿Cuáles son las implicaciones metodológicas? A esas preguntas se intenta dar respuesta a lo largo del presente texto, desde un punto de vista práctico para el docente, con siete propuestas metodológicas concretas para trabajar en el aula.

1. Introducción

El pasado mes de julio apareció una noticia en un periódico de ámbito nacional con el título “La selectividad deja en evidencia el bajo nivel en matemáticas” seguido del subtítulo “Es la materia con mayor tasa de suspensos y con peores notas medias”. Y la cuestión es que seguramente no sorprende demasiado a los lectores. No sorprende porque desgraciadamente la sociedad se acostumbra a que todos los estudios realizados arrojen resultados similares. No sólo en comparación con otras materias, sino también comparando el nivel matemático de los alumnos españoles con el de los alumnos de otros países. Y tampoco es una noticia reciente, sino que viene de tiempo atrás. Ejemplo de ello es el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS) realizado en 1997 que arrojó una media de los países participantes de 513 puntos, mientras que los alumnos españoles obtuvieron una media de 487 puntos, rozando el bloque de los países con menor nota obtenida. Y una década después los estudios PISA, con más repercusión mediática, corroboran este hecho con resultados bastante parecidos.

Esta realidad educativa implica una baja alfabetización matemática de nuestra sociedad que se refleja en actividades tan cotidianas como calcular un descuento al ir de compras, solicitar una hipoteca, adaptar una receta de cocina al número de comensales o interpretar la información numérica y gráfica que continuamente llega a través de los medios de comunicación. Se puede salir airoso de muchas situaciones sin tener unos conocimientos matemáticos mínimos al igual que se puede rellenar un formulario oficial o escribir un *curriculum vitae* lleno de faltas ortográficas e incorrecciones gramaticales. Parece ser que esto último conlleva una mala imagen social, mientras que reconocer abiertamente que no se tiene ni idea de matemáticas básicas es algo normal y que no preocupa en exceso. Esta opinión parece ser compartida por el portavoz de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), Adolfo Quirós, quien afirma en otro artículo periodístico que “los españoles presumen de no saber matemáticas”. Son bastante sintomáticos los desastrosos resultados que obtuvo hace algunos años el profesor Tomás Recio, miembro de la Comisión de Educación de la RSME, al preguntar a catedráticos de universidad, de disciplinas no vinculadas directamente con matemáticas, sobre el resultado de sumar 1/3 y 1/6.

Y es que la realidad, a pesar de todas las excusas que se quieran rebuscar, demuestra que la gran mayoría de los alumnos españoles acaban sus estudios sin saber utilizar en situaciones cotidianas las matemáticas que se les ha intentado enseñar. Es imprescindible realizar una revisión de los contenidos de los currículos, pero más clamorosa es la necesidad de renovar el enfoque y la metodología de enseñanza-aprendizaje de esta materia.

2. Competencia matemática

En ese afán por renovar el enfoque del sistema educativo, se ha introducido en la vigente legislación educativa el término "competencia básica", distinguiendo ocho de ellas: competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico, tratamiento de la información y competencia digital, competencia social y ciudadana, competencia cultural y artística, competencia para aprender a aprender y autonomía e iniciativa personal.

Obsérvese cómo se define la competencia matemática en distintos contextos dónde es utilizada.

Si se acude a PISA, se define la competencia matemática de la siguiente manera:

> Competencia matemática es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.

Y en los distintos Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas:

> Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

Posteriormente los mismos decretos especifican:

> Esta competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan.
>
> (…)
>
> El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva utilizar espontáneamente -en los ámbitos personal y social- los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones.

Es preciso aclarar que, en realidad, lo que se denomina competencia matemática no es una única competencia sino que engloba un conjunto de competencias. Por ello en ocasiones se habla de grupo competencial de matemáticas, o competencias matemáticas, en lugar de competencia matemática. Los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas no detallan dichas sub-competencias, pero sí podemos encontrar una relación de las mismas en PISA (OCDE 2006) con sus correspondientes descripciones:

> Pensamiento y razonamiento. Consiste en plantear preguntas características de las matemáticas («¿Hay...?», «En tal caso, ¿cuántos...?», «¿Cómo puedo hallar...?»); conocer los tipos de respuesta que las matemáticas ofrecen a esas preguntas; distinguir entre distintos tipos de asertos (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionales); y comprender y saber manejar el alcance y los límites de los conceptos matemáticos que hagan al caso.
>
> Argumentación. Comporta entender en qué consisten las pruebas matemáticas y qué las diferencia de otro tipo de razonamientos matemáticos; seguir y evaluar cadenas de argumentaciones matemáticas de distintos tipos; tener un sentido heurístico («¿Qué puede o no puede suceder y por qué?»), así como crear y expresar argumentaciones matemáticas.
>
> Comunicación. Consiste en la capacidad de expresarse de muy diversas maneras sobre temas de contenido matemático, tanto de forma oral como escrita, así como comprender las afirmaciones orales o escritas expresadas por otras personas sobre esas mismas materias.

Construcción de modelos. Comporta estructurar el campo o la situación para la que se ha de elaborar un modelo; traducir la realidad a estructuras matemáticas; interpretar modelos matemáticos en función de la realidad; trabajar con modelos matemáticos; validar un modelo; reflexionar, analizar y criticar un modelo y sus resultados; comunicar opiniones sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las propias limitaciones de tales resultados); y supervisar y controlar el proceso de construcción de modelos matemáticos.

Planteamiento y solución de problemas. Consiste en plantear, formular y definir distintos tipos de problemas matemáticos (por ejemplo, problemas «puros», «aplicados», «abiertos» y «cerrados»), así como la capacidad de resolver diversos tipos de problemas matemáticos de distintas maneras.

Representación. Comporta la capacidad de descodificar, codificar, traducir, interpretar y distinguir distintas formas de representación de objetos y situaciones matemáticos; las interrelaciones que existen entre las diversas representaciones; y la elección y alternancia entre distintos tipos de representación según las situaciones y objetivos.

Utilización de operaciones y lenguaje técnico, formal y simbólico. Comporta descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico; comprender sus relaciones con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico/formal; hacer uso de expresiones y asertos que contengan símbolos y fórmulas; emplear variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.

Empleo de material y herramientas de apoyo. Comporta conocer y saber emplear toda una serie de materiales y herramientas de apoyo (incluidas las herramientas de las tecnologías informáticas) que pueden contribuir a la realización de la actividad matemática, así como conocer las limitaciones de dichos materiales y herramientas.

Es útil y necesaria para el docente una concreción de estas sub-competencias con el mayor detalle posible debido a la complejidad que supone trabajar únicamente con el objetivo de desarrollar una competencia tan general y casi abstracta como es la definición de competencia matemática.

3. Novedad de la enseñanza y aprendizaje mediante competencias

Es frecuente observar en algunos círculos de debate entre docentes cierta reticencia sobre la novedad que supone trabajar mediante competencias. Ciertamente, el término “competencia”, visto desde el aula, podría ser substituido, con matices, por términos utilizados en anteriores leyes educativas como, por ejemplo, “habilidades”, “destrezas”, “capacidades”…

No obstante, aunque el término “competencia” no suponga en sí mismo una novedad significativa para algún docente, sí lo supone el enfoque que se le da al mismo en la nueva ley educativa. El eje central de las anteriores leyes educativas eran los contenidos y la adquisición de éstos era el fin perseguido. Sin embargo, el énfasis en la nueva ley educativa recae sobre el desarrollo de las competencias básicas. Los contenidos, con la metodología adecuada, son el medio para conseguir dicho desarrollo.

Para ejemplificar este cambio de enfoque y concretarlo en la competencia matemática se incluye la siguiente cita de Sol, Jiménez y Rosich (2007):

> Lo fundamental del trabajo orientado al desarrollo competencial del alumnado es que, ante una situación contextualizada o no, éste se sabe enfrentar a la misma con las herramientas matemáticas que posee. No vamos a reconocer si se sabe resolver ecuaciones, sino si se sabe usar ecuaciones para resolver un problema.

4. Propuestas para trabajar la adquisición y desarrollo de la competencia matemática en la materia de Matemáticas

Conocer la fundamentación de las competencias y su filosofía es indispensable para lograr su desarrollo. Pero, para el docente de matemáticas que debe impartir cada día las clases, es necesario ir más allá y mostrar una serie de ejemplos prácticos de cómo puede basar su enseñanza, y el aprendizaje de sus alumnos, en el desarrollo de las competencias básicas. El objetivo no es inventar nada, sino recoger algunos de los avances de las últimas décadas en Didáctica de las Matemáticas para aplicarlos de forma conveniente al aula. Por otra parte, es muy importante destacar que las propuestas ejemplifican un trabajo continuo, integrado y habitual; no se trata de actividades esporádicas o aisladas que de vez en cuando se realicen para trabajar el desarrollo de las competencias.

4.1. Evitar siempre que sea posible el abuso de ejercicios mecánicos y repetitivos.

La realización de ejercicios mecánicos y repetitivos puede, en contadas ocasiones, favorecer la asimilación de una rutina algorítmica de cálculo o un procedimiento. No obstante, la enseñanza de la matemática no puede sustentarse en este recurso metodológico y es del todo desaconsejable abusar de este tipo de ejercicios.

Un ejemplo de esta práctica abusiva se puede encontrar, sin buscar demasiado, en un libro de 4º de ESO, en el que para practicar la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas podemos encontrar hasta un total de 41 ejercicios seguidos de sistemas de ecuaciones del estilo

$$\begin{array}{c} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{array}$$

En unos se pide la resolución por el método de substitución, en otros por el de igualación, en otros por el de reducción y en otros se deja elegir al alumno. El resultado es que el alumno resuelve 41 sistemas de ecuaciones sin ningún tipo de significado. ¿Qué es la “x”? ¿Qué es la “y”? ¿Para qué quiero resolver esto?

Mucho más provechoso sería proponer problemas, bien el profesor bien los propios alumnos, en los que el alumno deba traducirlo a un sistema (construcción de un modelo) y, como práctica de los procedimientos, deba resolverlo para dar solución a la pregunta que hace el problema. De esta forma se enlaza con la siguiente propuesta.

4.2. En todo momento dar sentido y contexto a lo que se trabaja.

El aprendizaje repetitivo, basado en la memorización y repetición de rutinas, poco favorece la comprensión del significado de los conceptos. Parece una obviedad afirmar que aquello que se entiende se aprende mejor. Y son ya algunos años los que dentro del mundo de la pedagogía se habla del aprendizaje significativo y de relacionar los nuevos conceptos con los conocimientos previos. Pero no cualquier conexión con el conocimiento anterior es válida. Es preciso señalar que si se enseña un nuevo concepto conectándolo con un conocimiento previo que carece de significado para el alumno, se está creando una red de conocimiento estéril.

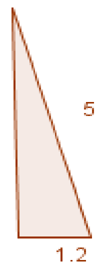
Por poner un ejemplo relacionado con el de la propuesta anterior, piénsese en un alumno que sabe resolver ecuaciones con una incógnita de primer grado, pero no sabe qué es una ecuación ni qué significa resolver una ecuación. El docente puede introducir un nuevo conocimiento, en este caso los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, conectándolo con las ecuaciones con una incógnita de primer grado. Probablemente, el alumno aprenderá a resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, pero seguirá sin saber qué es una ecuación, qué significa resolver una ecuación y difícilmente llegará a saber lo que es un sistema de ecuaciones y lo que significa resolverlo.

Por ello es imprescindible dotar de significado y sentido a lo que se enseña, cosa que se favorecerá en gran medida si se realiza una adecuada contextualización del conocimiento.

De nuevo se acude a ejercicios extraídos de libros de texto para ejemplificar la carencia de contexto y significado:

E1. Calcula la media aritmética de 10, 3 y 5.

E2. ¿Cuánto mide el lado desconocido del siguiente triángulo?



En ambos casos el conocimiento que debe poner en acción el alumno son algoritmos que ha aprendido y debe repetir. En el primer caso se aplica la fórmula de la media aritmética que aparece poco antes en el texto del libro. En el segundo caso se aplica la fórmula del teorema de Pitágoras que se explica en el apartado del libro donde aparece el ejercicio. Sin entrar a valorar la ubicación de los ejercicios respecto a la explicación, la pregunta que cabe hacerse es si es necesario que el alumno entienda el concepto de media aritmética o el teorema de Pitágoras para resolver los ejercicios. Es evidente que la respuesta es no. Entonces no debería extrañar que luego se proponga a los alumnos un problema en el que deben poner en juego el significado de los conocimientos aprendidos y la mayoría no es capaz de resolverlo.

Se puede optar por proponer problemas contextualizados del estilo:

> P1. Laura, Lourdes y Cristina tienen 10, 3 y 5 caramelos respectivamente. ¿Qué pueden hacer para tener el mismo número de caramelos cada una?
>
> P2. Una escalera de 5m está apoyada en la pared y su extremo inferior está a 1'2m de la misma. ¿Qué altura alcanzará su extremo superior?

En el primer problema puede entrar en juego una idea intuitiva de qué es la media aritmética y para qué sirve. En el segundo problema ya no se busca cuánto mide un lado en un triángulo abstracto, sino que se quiere saber a qué altura llega la escalera (por ejemplo porque antes de salir del almacén necesito saber si llega hasta una farola para cambiar la bombilla).

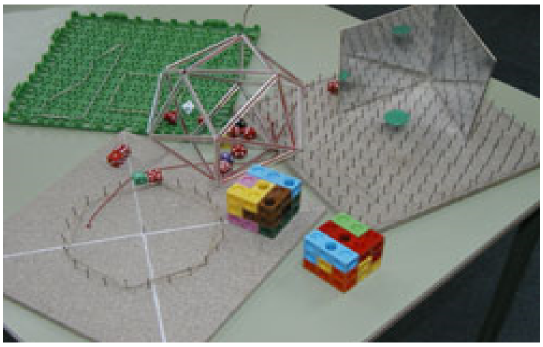
4.3. Complementar el uso del libro de texto con otros recursos y fuentes.

Es importante considerar el libro de texto como un recurso más de entre todos los que disponemos. El docente, como profesional, debe decidir cuándo es conveniente utilizar un recurso y determinar su idoneidad para el fin perseguido, en función de, entre otras variables, las características de sus alumnos, el contenido a enseñar/aprender y los puntos fuertes y débiles del recurso en cuestión. Utilizar de manera habitual solamente un recurso impide en gran medida el desarrollo de una enseñanza completa, integrada y coherente.

A modo de ejemplo y sin el objetivo de realizar una lista exhaustiva de recursos, ni mucho menos, a continuación se comentan tres tipos de recurso cuya utilización de manera habitual en el aula puede resultar provechosa: los materiales manipulables, los medios de comunicación y el software.

4.3.a. Los materiales manipulables.

Hace bastante tiempo que se promulga el uso de los materiales manipulables en las clases de Matemáticas. Y no es difícil encontrar multitud de propuestas que integran el trabajo con estos materiales en la práctica diaria del aula. En muchas ocasiones la elaboración del propio material manipulable por parte del alumnado constituye una actividad rica en sí misma para la clase de Matemáticas, o en colaboración con otras materias. Por otra parte, también se comercializan materiales de estas características (cuerpos geométricos, dados, espejos, tangrams, puzles, geoplanos…).



Materiales manipulables

La premisa principal es que “las matemáticas se aprenden mejor haciendo”. Cabe destacar con especial énfasis el uso de los materiales manipulables en los primeros niveles educativos, en los que los alumnos necesitan trabajar con objetos concretos y tangibles. Al contrario de lo que algunos docentes piensan, esto no constituye un argumento a favor del abandono de estos materiales en niveles posteriores, sino que los materiales manipulables deben jugar un papel distinto, como por ejemplo favorecer el trabajo inductivo en la investigación de situaciones problemáticas o la elaboración de hipótesis.

4.3.b. Los medios de comunicación.

Es innegable la gran cantidad de información susceptible de ser analizada desde un punto de vista matemático que llega diariamente a la sociedad a través de los medios de comunicación: encuestas de opinión pública, “share” de las cadenas de televisión, campañas publicitarias, tablas de clasificación de los clubs deportivos, índices de consumo (como el IPC) y bancarios (como el Euribor), datos de empleo y paro... Es una obligación del sistema educativo formar ciudadanos capaces de realizar un análisis de toda esa información para poder tomar decisiones con un criterio sólidamente fundamentado en argumentos válidos.

Véase por ejemplo la siguiente campaña publicitaria de una conocida operadora de telefonía móvil. Fue emitida recientemente en televisión y publicada en prensa.

Campaña publicitaria en TV de una operadora de telefonía móvil

En el anuncio se ve a un hombre que construye tres pirámides, de distinto color, con los teléfonos móviles de los usuarios de las principales operadoras de telefonía móvil. En la imagen capturada puede observarse el estado final de las pirámides, con el dato del número de clientes que representan. Un simple vistazo basta para observar que la pirámide azul (de 22,8 millones de clientes) tiene casi el doble de altura que la pirámide roja (de 15,8 millones de clientes). Esto es una gran equivocación, por no presuponer una manipulación publicitaria intencionada, de los que diseñaron la campaña publicitaria.

Si construimos una pirámide con los móviles de los usuarios, el número de clientes de una compañía vendría dado por el volumen de su pirámide (tomando como unidad 1 móvil). Dado que las pirámides son semejantes, la razón entre los volúmenes no es la misma que la razón entre las alturas. Es decir, una pirámide que tenga el doble de volumen que otra semejante no es el doble de alta que ésta (como sucede en la imagen de la campaña publicitaria). El resultado visual causado por esta equivocación es que hay muchos más clientes en la pirámide azul de los que indica el dato real.

Pero además de realizar este análisis de la situación, la simple imagen puede convertirse en todo un repertorio de actividades de investigación para realizar en el aula. Por ejemplo, después del análisis de la situación se ha llegado a la conclusión de que las pirámides están mal construidas, ¿qué altura deberían tener si estuvieran bien construidas? ¿Cuántos móviles hay en la pirámide azul de la imagen? Si tomamos las medidas de un móvil, ¿qué dimensiones tendría una pirámide construida con móviles reales? Tomando como referencia el hombre de la imagen, suponiendo que tiene una altura aproximada de 1'80 metros, ¿se ajusta la realidad a la razón entre altura de pirámide y altura del hombre en la imagen? Y...

Véase otro ejemplo, esta vez extraído de uno de los debates televisivos entre dos de los candidatos a la presidencia del país en la pasada campaña electoral.

Zapatero: “El paro ha bajado.”

Rajoy: “El paro ha subido.”

En sus correspondientes turnos ambos candidatos sostenían dos afirmaciones, cuya justificación se sustentaba en gráficos. Por una parte, el Sr. José Luís Rodríguez Zapatero afirmaba que el paro había bajado mientras mostraba un gráfico de barras y, por otra, el Sr. Mariano Rajoy afirmaba que el paro había ascendido mientras mostraba un gráfico de líneas.

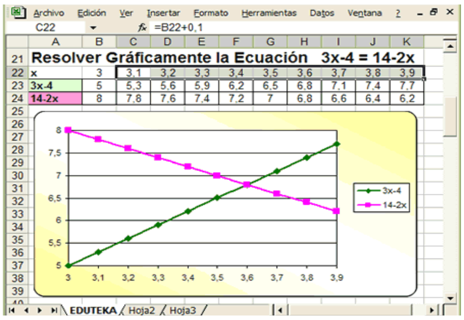
A priori uno puede pensar que uno de los dos está mintiendo porque no es posible que el paro suba y a la vez baje. Pero en este caso ambos contendientes sostenían sus argumentos en datos verídicos oficiales. Ninguno de ellos estaba mintiendo. ¿Cómo es esto posible? Pues debido a que, aunque ambos candidatos hablaban del paro, no nos explicaron con claridad que estaban hablando en términos distintos. El Sr. Rajoy hablaba en términos absolutos, es decir, el gráfico mostraba la evolución del número de personas que hay apuntadas al paro. Y era un dato verídico que en los últimos años se había incrementado el número de parados. Por otra parte, el Sr. Rodríguez Zapatero hablaba en términos relativos, es decir, el gráfico mostraba la evolución del porcentaje de gente apuntada al paro sobre el total de la población. Y era un dato verídico que dicho porcentaje había disminuido en los últimos años.

Algo similar pasó con los datos de la inflación, donde el Sr. Rajoy hablaba de la inflación puntual y el Sr. Rodríguez Zapatero de la inflación media. Un ciudadano debe tener una suficiente alfabetización matemática como para entender la información que le llega y así poder decidir qué criterio quiere seguir.

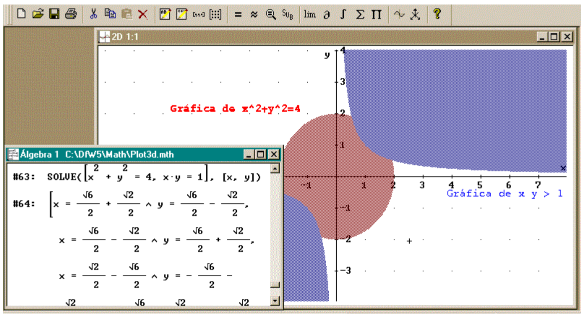
4.3.c. El software.

La visualización, estática y dinámica, de objetos matemáticos y la ayuda en cálculos complejos o tediosos son dos de los grandes potenciales que ofrecen los programas informáticos para las clases de Matemáticas.

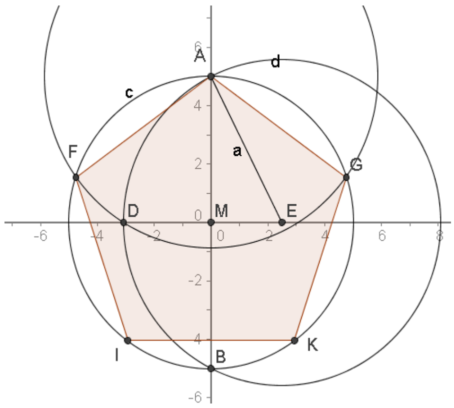
Desde la década pasada se publican libros y páginas web con gran cantidad de actividades que integran el uso de las TIC en el aula: hojas de cálculo para trabajar la estadística y el álgebra, programas de cálculo simbólico para trabajar el análisis, programas de geometría dinámica para trabajar la geometría plana...



Hoja de cálculo



Cálculo simbólico



Geometría dinámica

Es preciso resaltar que el software, como cualquier otro recurso, por sí mismo no desarrolla la competencia matemática, sino un uso adecuado del mismo. El docente debe seleccionar convenientemente el recurso a emplear en función de las actividades y objetivos propuestos. Por ejemplo, poner a un alumno de Primaria a practicar multiplicaciones en el ordenador en lugar de realizarlas sobre el papel puede añadir un pequeño elemento de motivación, cada día menos si tenemos en cuenta que casi todos los alumnos tienen ordenador y videoconsolas en casa, pero no estamos desarrollando más la competencia matemática de lo que lo hacía la actividad sobre el papel.

El software posibilita realizar tareas que difícilmente serían abordables, por su grado de complejidad o por el tiempo requerido, en un aula convencional. La clave está en saber aprovechar ese potencial para plantear actividades de investigación. Por ejemplo, se puede preguntar en clase cuánto mide la superficie del terreno donde está edificado el colegio o instituto (o el polideportivo del pueblo vecino dónde se realiza una fiesta conjunta y deben decidir cuántas mesas caben) y para ello nos podemos ayudar de un programa de imágenes de satélites (por ejemplo Google Earth) y un programa de geometría dinámica (por ejemplo Geogebra).

4.4. Plantear cuestiones abiertas: problemas con más de una solución, o sin solución, abordables desde más de una perspectiva...

La competencia matemática pasa por saber abordar un problema cotidiano en el que se necesiten, o se puedan emplear, matemáticas. En los contextos no académicos no es tan frecuente que los problemas tengan una solución preparada (como por ejemplo soluciones enteras). Es más, en ocasiones la solución a un problema cotidiano no es única o incluso la solución es que no tiene solución. Deben incluirse actividades abiertas en la práctica docente para desarrollar estas competencias en los alumnos.

La siguiente actividad fue planteada por una alumna de Magisterio con el objetivo de introducir a los alumnos el concepto de aproximación de números decimales. Al final en la clase, con sus compañeros, la actividad tuvo un desenlace que la alumna no había previsto. La recojo aquí como muestra de una actividad abierta, abordable desde más de una perspectiva.

Juanito tiene una botella de 2 litros de limonada que preparó él mismo. Quiere que sus 7 amigos la prueben, pero además quiere que todos beban la misma cantidad. ¿Qué puede hacer?

A continuación se simula una posible resolución que los alumnos hacen en clase, guiados por las preguntas del docente:

Vamos a la cocina y miramos diferentes utensilios que nos puedan servir para medir el líquido. Decidimos que el más adecuado es un recipiente en el que están marcados los mililitros. Así que pasamos los 2 litros de limonada a mililitros (2000 ml).

Repartir en partes iguales es dividir. Por tanto, realizamos 2000 : 7

El resultado es 285’71428… (Recordemos que la precisión del recipiente está en ml)

¿Qué creéis que debería hacer para poder medir su limonada en el recipiente?

Debemos quitar los decimales y quedarnos con un número entero. Podríamos quedarnos con 285 (aproximación por defecto) o con 286 (aproximación por exceso).

¿Con cuál nos quedamos?

El entero más próximo a 2000 : 7 = 285'71… es 286 (lo que llamamos redondeo).

Pero resulta que si tengo que repartir 286 ml a cada uno de los siete amigos, son en total 286 · 7 = 2002 ml de limonada.

…

Seguiría resolviéndose la actividad en clase de la forma que se crea conveniente. Se insta al lector a que reflexione sobre la riqueza de una simple actividad abierta de reparto en un contexto real. Por otra parte, se hace necesario un análisis de las soluciones obtenidas: la solución del redondeo, que es la mejor aproximación entera al número decimal obtenido en la división, no sirve en este contexto con los datos del problema.

Uno de los inconvenientes que algunos docentes manifiestan en este tipo de actividades, por ser abiertas y prestarse al debate de perspectivas en la clase, es que consumen más tiempo. Si bien esto es cierto, debe considerarse que con estas actividades se está fomentando la reflexión en el alumnado, la elección de estrategias, el análisis de la solución y se le prepara para afrontar problemas cotidianos y a desarrollar su competencia matemática. Por otra parte, la cantidad de contenidos que se han trabajado simultáneamente en una única actividad compensa el tiempo empleado en la propia actividad. Compárese con una enseñanza tradicional en la que primero se enseña a aproximar números decimales por defecto y se realizan 4 ejercicios para practicarlo, luego se enseña a aproximar números decimales por exceso y se realizan 4 ejercicios para practicarlo, luego se enseña a redondear y… (Además de la escasa atención que se presta a saber cuándo es conveniente utilizar uno u otro).

4.5. Interrelacionar los contenidos de los diversos bloques.

Una de las características de las matemáticas es la gran interconexión que se puede establecer entre sus contenidos. Los contenidos matemáticos en los R.D. de Enseñanzas Mínimas, y en los diferentes currículos de las Comunidades Autónomas, se estructuran en bloques de contenido. No obstante, los contenidos no deben abordarse en el aula por bloques, sin relación con el resto de contenidos tanto del mismo bloque como de otros. En los mismos Reales Decretos podemos encontrar las siguientes indicaciones (el subrayado ha sido añadido):

> Los contenidos se han organizado en cuatro bloques que responden al tipo de objetos matemáticos que se manejan en cada uno de ellos: Números y operaciones, Medida, Geometría y Tratamiento de la información, azar y probabilidad. Es preciso advertir que esta agrupación es sólo una forma de organizar los contenidos, que habrán de abordarse de manera relacionada.
>
> R.D. de Enseñanzas Mínimas de la Educación Primaria (p. 43096)

> Es preciso indicar que es sólo una forma de organizarlos. No se trata de crear compartimentos estancos: en todos los bloques se utilizan técnicas numéricas y algebraicas, y en cualquiera de ellos puede ser útil confeccionar una tabla, generar una gráfica o suscitar una situación de incertidumbre probabilística.
>
> R.D. de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (p. 750)

Para ejemplificar dicha interrelación se plantea una actividad abierta:

> Ester, por cuestiones ecológicas y también económicas, ha comenzado a tomar datos del consumo de combustible de su coche según la velocidad a la que circula. Ha memorizado y ha anotado, una vez parado el coche, los siguientes:
> A 25 km/h se registra un consumo de 6 litros / 100 km.
> A 40 km/h se registra un consumo de 8 litros / 100 km.
> ¿Puede Ester deducir sin coger el coche cuál será el consumo cuando circule a una velocidad de 90 km/h?

Una posible resolución de los alumnos sería la siguiente (la manera de abordar el problema depende del nivel al que va dirigido):

> Como conocemos algunos datos completos y necesitamos completar otro, acostumbramos a organizarlos en una tabla y aplicar una regla de tres.

A más velocidad hay un mayor consumo, luego la regla de tres es directa:

Km/h	l/100km
25	6
40	8
90	x

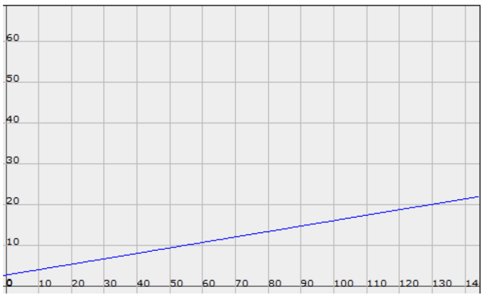
$90 / 40 = x / 8$ $x = 90 \cdot 8 / 40 = 18$ R. 18 l / 100 km

Pero resulta que los datos que se han recogido no están en proporción: $40 / 25 \neq 8 / 6$

Por tanto, no podemos aplicar una regla de tres si no hay proporcionalidad.

¿Y si buscamos una función que modele la situación?

Como tenemos dos datos completos (dos puntos), podemos construir la recta que pase por esos puntos:



$y = ax + b$

$6 = 25a + b$

$8 = 40a + b$

$y = (2/15)\, x + 8/3$

Ya tenemos un posible modelo para la situación. Podemos obtener más datos experimentales y comprobar si el modelo se ajusta o si hay que modificarlo.

Un nuevo dato obtenido experimentalmente es que a 80 km/h se registra un consumo de 6 l / 100km.

Entonces comprobamos que el modelo lineal que habíamos obtenido no sirve. Podemos optar por incluir el nuevo dato en un modelo cuadrático (parábola):

$y=ax^2+bx+c$

…

Km/h	l/100km
25	6
25	9
40	8
80	6

Un nuevo dato obtenido experimentalmente es que a 25 km/h se registra un consumo de 9 l / 100 km.

Ahora vemos que nuestra hipótesis de encontrar una función que nos sirva de modelo para la situación del coche no sirve, debido a que las variables no forman una relación de dependencia (a 25 km/h hemos obtenido dos consumos distintos: 6 y 9 l / 100 km)

¿Tal vez debamos incluir otra variable? ¿Las revoluciones por minuto (rpm) del motor?

Km/h	rpm	l/100km

¿Será un problema de proporcionalidad compuesta?

…

Obsérvese la cantidad de contenidos que pueden trabajarse con una actividad abierta planteada convenientemente. En la actividad anterior: proporcionalidad simple y proporcionalidad compuesta, unidades de medida (km, l, hm, h…), ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, relaciones de dependencia y funciones, función lineal y cuadrática, interpolación, representación gráfica de funciones, organización de la información en tablas…

Las implicaciones de una enseñanza de contenidos aislados se pueden observar en la experiencia que recoge el Dr. Abraham Arcavi (2007) en una conferencia. Se plantea a los alumnos el siguiente problema que involucra contenidos de diferentes bloques:

> El gráfico Cartesiano de las funciones y=ax+1 es una recta que forma un triángulo con los ejes coordenados. Lanzamos un dado común y sustituimos “a” por el valor obtenido. ¿Para qué valor de “a” el triángulo formado es isósceles? ¿Para qué valor de “a” se obtiene el triángulo de menor área? ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo formado sea menor que 1/6? ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo formado sea mayor que 1/2?

El texto que sigue recoge algunas de las reflexiones que hicieron los alumnos (A) al preguntarles sobre las dificultades del problema (el subrayado ha sido añadido).

> A: “La verdad es que al principio vi el dado y pensé esto es probabilidades, pero no entendí como está relacionado. Pero después que tracé la recta empecé a entender cómo resolverlo…” “Las preguntas en clase son más fáciles. Nunca antes se me juntaron probabilidades con geometría analítica**.** Por ejemplo, en clase, hay una técnica para probabilidades, entonces yo sé que tengo que dibujar un “árbol”. Acá es más abstracto, solamente cuando tracé entendí lo que me pedían. … Una pregunta como ésta con geometría no vi nunca, no tenía idea por dónde empezar. En clase yo sé que tengo que dibujar un árbol**…**”- Entrevistador: “¿Acaso la pregunta te pide un árbol?**” -A: “**No, pero así nos enseñaron, es el método de trabajo, acá no sabía cuál es el método.”
>
> Entrevistador: “¿La preguntas son fáciles/difíciles?” -A: “Me imagino que si hubiera estudiado esto, lo hubiera podido resolver mejor” - Entrevistador: **“**¿No estudiaste estos temas?” -A: “Sí, pero no de esta forma”
>
> Entrevistador: “¿La preguntas son parecidas, distintas a las que ves en clase?” -A: “Son distintas porque mezclan dos temas en una sola pregunta. En la clase, si es probabilidades, es eso sólo, si son funciones, es eso sólo**.** - Entrevistador: **“**¿Te interesaría que haya preguntas como estas que conectan distintos temas?” -A: “No, no

creo. Me resulta más cómodo como es ahora. Es más simple. Pero, en realidad, si alguien me dice cómo hacer, yo diría, ¡ay!, ¿cómo no lo entendí antes?"

A: "Me resulta mejor estudiar como estudiamos en clase. Esto me parece raro. … Lo difícil es que acá tengo que entender primero… Acá hay probabilidades y pendientes, áreas y geometría, no se centra en una sola cosa… Puede ser que si hubiera estudiado estas preguntas raras que tienen más o menos de todo me las hubiera arreglado bien…"

4.6. Utilizar la investigación de situaciones problemáticas como metodología habitual de trabajo.

La investigación de situaciones problemáticas es una actividad que pone de manifiesto el grado de competencia adquirida y fomenta su desarrollo, dado que, según dicen los Reales Decretos de Enseñanzas mínimas, la "competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan".

Sol, Jiménez y Rosich (2007) desarrollan esta línea de trabajo con lo que denominan Proyectos Matemáticos Realistas. Los alumnos escogen situaciones problemáticas que desean investigar. Al intentar dar respuesta a la pregunta que se plantean deben poner en juego una gran cantidad de conocimientos matemáticos y deben ser capaces de seleccionarlos, utilizarlos y conectarlos adecuadamente.

A modo de ejemplo, algunos proyectos realizados por los alumnos son los siguientes:

- El parque de las aves: ¿Come más un animal grande que uno pequeño?
- Vuelos económicos: ¿Cuánto podemos ahorrar en viajes en función de la compañía?
- El bar del instituto: ¿Cuál es la mejor forma de organizar el espacio del bar?
- Pasteles y culturas: comparar precios e ingredientes de los diferentes pasteles.
- Aparcamiento alrededor del instituto: diseñar un aparcamiento debido a la saturación existente.

Otra de las ventajas que aporta la investigación de situaciones problemáticas es que permite abordar la diversidad de los alumnos. Cada alumno puede plantearse preguntas y aportar algo a la investigación, en función de su nivel. Al respecto puede consultarse el resultado de la experiencia llevada a cabo por Sol (2006).

4.7. Dar la oportunidad a los alumnos de reinventar las matemáticas.

"…dejad que los estudiantes hagan suposiciones,
dejadles descubrir por sí mismos siempre que sea posible."
George Polya

En el mundo de la Educación es conocida la teoría del aprendizaje denominada Aprendizaje por Descubrimiento, desarrollada por Jerome Bruner en la década de los 60. Sin entrar a describir con detalle este tipo de aprendizaje, del cual existe una extensa bibliografía, se podría sintetizar remarcando que su principal característica es que el alumno no recibe pasivamente los contenidos, sino que debe descubrirlos y encontrar sus relaciones.

En el campo específico de la Didáctica de las Matemáticas existen autores importantes que defienden el mismo principio como pilar básico de la enseñanza de las matemáticas. Como puede observarse en la cita que abre este apartado, uno de ellos es George Polya, más conocido generalmente por sus teorías sobre la resolución de problemas.

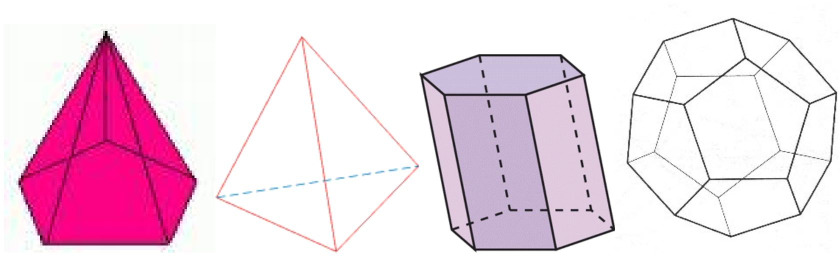
Hans Freudenthal también sostenía la misma idea y así se recoge en uno de los principios básicos de la denominada Educación Matemática Realista, desarrollada en el Instituto Hans Freudenthal, centro holandés de investigación en Educación Matemática de reconocido prestigio a nivel internacional. El denominado principio de reinvención guiada explicita que debe darse al alumno la oportunidad de reinventar las matemáticas. Es decir, no debe recibir la transmisión de una matemáticas ya hechas y cerradas, sino que debe ser el estudiante quien descubra los resultados y construya el conocimiento. Es imprescindible el rol que juega el profesor, como guía en el proceso de reinvención. Para ello debe proponer, supervisar y redirigir las actividades que propicien dicho proceso.

Véase un ejemplo. En el sistema tradicional de enseñanza, el alumno recibe (pasivamente) la fórmula de Euler:

> En un poliedro convexo el número de caras (C) sumado con el número de vértices (V) resulta igual que sumar dos al número de aristas (A).

$$\boxed{C + V = A + 2}$$

A continuación comprueba que se cumple en los siguientes cuerpos geométricos.



De esta manera se están presentando las matemáticas como algo estático y ya hecho por otras personas, en las que poco puede hacer el alumno más que aprendérselo y aplicarlo.

Ofrézcasele la oportunidad al alumno de llegar al resultado, con la ayuda del docente.

Vamos a rellenar la siguiente tabla con los elementos de los prismas:

Lados de la base	Nombre	Nº caras	Nº vértices	Nº aristas
4	cuadrangular	6	8	12
5	pentagonal	7	10	15
6	hexagonal	8	12	18
7	heptagonal	9	14	21
…	…	…	…	…

Dependiendo del nivel educativo podemos completar la tabla realizando procesos de generalización:

n		n+2	2n	3n

Y ahora se pregunta: ¿Existe alguna relación entre el número de caras, el número de vértices y el número de aristas? (El docente irá realizando las preguntas oportunas para guiar a los alumnos en su descubrimiento.)

¿Ocurrirá lo mismo con las pirámides?

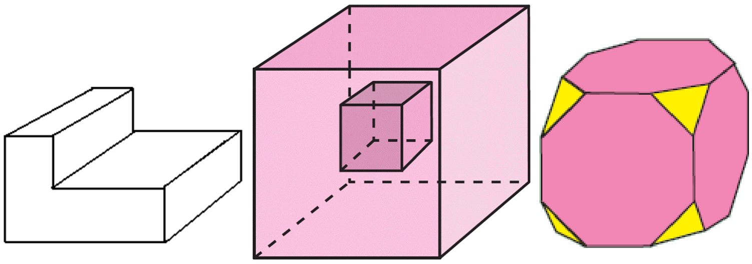
Lados de la base	Nombre	Nº caras	Nº vértices	Nº aristas

¿Influye que los poliedros vistos (prismas y pirámides) sean oblicuos o rectos?

¿Se cumple la relación en los poliedros regulares?

Nombre	Nº caras	Nº vértices	Nº aristas
Tetraedro			
Cubo			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

¿Se cumple la propiedad en los siguientes poliedros?



...

5. Peligros y limitaciones

Sería bastante ingenuo pensar que el cambio para el docente es inmediato y fácil. Ni se hace de un día para otro ni debiera realizarse en solitario. Para ello lo conveniente es introducir aquellos aspectos que el docente considera alcanzables en un primer momento para posteriormente ir incorporando el resto de mejoras metodológicas, con la ayuda de los compañeros, grupos de trabajo, seminarios y de aquellos docentes que llevan tiempo aplicando este tipo de metodologías.

Se debe ser consciente también de las limitaciones, dificultades y peligros que conlleva cambiar la metodología para adaptarla al desarrollo de la competencia matemática. A continuación se incluyen algunos de los puntos a tener en cuenta, con una breve descripción.

- La artificialidad y el falso realismo. La búsqueda de situaciones en contexto no debe llevar al docente a plantear a sus alumnos actividades con un contexto artificial, absurdo o poco significativo. Claudi Alsina plasmó muy bien esta idea con el título de su ponencia “Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿Cuántas tuvo Enrique IV?” (véase Alsina, 2007).

- Dificultades de los alumnos en actividades de investigación. Sol, Jiménez y Rosich (2007, p. 47) observan que en actividades de investigación los alumnos tienen dificultades: i) para reconocer la necesidad de simplificar la situación inicial antes de plantear el problema matemático; ii) para reconocer conexiones entre el mundo real y las matemáticas; y iii) en los procesos matemáticos, al tratar de buscar la solución del problema. Así pues, se deberá tener en cuenta dichas dificultades para poder actuar sobre ellas a la hora de trabajar actividades de investigación.

- Suspensión del sentido común por herencia de los problemas escolares. En Callejo (2007) se analiza la relación entre el uso del sentido común y la resolución de problemas. Por una parte se constata que el nivel de desarrollo de la capacidad de modelizar es muy bajo en estudiantes españoles. Y por otra, se evidencia una fuerte tendencia de los estudiantes a excluir sus conocimientos del mundo real en la resolución de problemas realistas. Problemas del estilo “En un barco van 26 ovejas y 10 cabras, ¿cuál es la edad del capitán?” son contestados por algunos estudiantes utilizando los números que aparecen en el enunciado. Problemas del estilo “Queremos unir dos postes que distan 12 metros con trozos de cuerda de 1'5 metros de largo, ¿cuántos trozos necesitamos?” son contestados mayoritariamente utilizando los números que aparecen en el enunciado, sin tener en cuenta las características de la situación real (necesitamos más de 8 trozos para poder unirlos y atarlos a los postes). Las causas de este tipo de conducta radican principalmente en las creencias de los estudiantes acerca de los problemas escolares, fruto de la herencia adquirida durante su formación.

- Lucha con los alumnos por una metodología activa (inercia pasiva). La experiencia dice que el cambio de rol del alumno, que pasa de recibir pasivamente las matemáticas a ser partícipe de su reconstrucción, provoca en algunos estudiantes cierta reticencia a cambiar esa inercia pasiva. Esa reticencia suele ser mayor en niveles superiores, debido a que llevan más años ejerciendo su rol pasivo. Es común escuchar expresiones del estilo “¿Cómo voy a hacer una cosa que aún no se ha explicado?” o “No nos hagas pensar. Dime cómo tengo que hacerlo y yo lo hago.". Si el docente mantiene esa metodología activa, con el tiempo se observa que dicha reticencia va menguando y que poco a poco esos estudiantes se adaptan al nuevo rol.

6. Reflexiones finales

Aunque no se han tratado a lo largo de este texto, hay dos cuestiones fundamentales sobre las que se invita a reflexionar: la primera es la evaluación y la segunda la formación del profesorado.

En cuanto a la evaluación cabe destacar que los estudiantes perciben que aquello que necesitan, lo importante, es aquello que se les evalúa. Sería un contrasentido cambiar la metodología de enseñanza y aprendizaje sin renovar y complementar los actuales sistemas de evaluación, que no contemplan muchos de los aspectos que se quieren desarrollar en el alumnado.

Por otra parte, es totalmente imprescindible, si se quiere que los verdaderos cambios importantes no queden sobre el papel, como ha sucedido en otras ocasiones, que las administraciones educativas gestionen un buen plan de formación de los actuales docentes en ejercicio. ¿Quién enseña al docente cómo fomentar el desarrollo de las competencias básicas en sus alumnos? El docente no debe quedar nunca desamparado y sin recursos ante una exigencia de cambio metodológico por parte de las administraciones educativas.

Finalmente, es muy importante diferenciar la competencia matemática de la materia de Matemáticas. La competencia matemática es una competencia básica y como tal debe ser desarrollada, en diferente medida, desde todas las materias.

Referencias

Alsina, C. (2007): Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿Cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en Educación Matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 85-101.

Arcavi, A. (2007): *Hacia una visión integradora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Conferencia realizada en noviembre de 2007 en Santiago de Chile.

Callejo, M.L. (2007): Resolución de problemas realistas y uso del sentido común. *UNO*, 46, 61-71.

M.E.C. (2006): REAL DECRETO 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. *BOE* núm. 293 (viernes 8 diciembre 2006), 43053-43102.

M.E.C. (2007): REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE* núm. 5 (viernes 5 enero 2007), 677-773.

OCDE (2006): *PISA 2006. Marco de la evaluación*.

Rico, L. (2007): La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.

Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2008): *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Alianza Editorial: Madrid.

Sol, M. (2006): *Les competències en els treballs de projectes matemàtics per una educació equitativa a l'ESO*. Memòria de la llicència d'estudis concedida per la Generalitat de Catalunya.

Sol, M.; Jiménez, J. y Rosich, N. (2007): *Competencias y proyectos matemáticos realistas en la ESO*. UNO, 46, 43-59.

Varios (2007): Competencias y uso social de las matemáticas. *UNO*, 46.